МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

7 класс. Комбинаторика–1. 27 мая 2009.

1. В комнате было несколько человек: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем как рыцарей, так и лжецов было не меньше, чем по двое. Каждый присутствующий указал на каждого из оставшихся и произнес: "Ты - рыцарь!" или "Ты -лжец!". Высказываний "Ты -лжец!" было ровно 30. Сколько людей было в комнате?

2. Новости в городе Сплетнинске распространяются так: каждый житель, узнавший какую-то новость, на следующее утро делится ею с двумя горожанами, ранее эту новость не знавшими, и больше никому ее не рассказывает. В декабре семь жителей Сплетнинска независимо друг от друга узнали важную новость. Могут ли через несколько дней ровно a) 500 жителей; b) 503 жителя знать эту важную новость?

3. В олимпиаде участвуют 2008 школьников. Во время каждого тура их рассаживают в две очень большие аудитории так, чтобы в них было поровну школьников. Какое наименьшее число туров нужно провести так, чтобы любые двое хотя бы в одном из туров находились в одной аудитории?

4. Пять девушек владеют небольшим магазином, работающим с понедельника по пятницу. Каждый рабочий день там должны работать две из них. Они хотят составить расписание на неделю так, чтобы каждая из них работала ровно два дня, причем с разными напарницами. Сколькими способами можно составить такое расписание?

5. Имеется 2008 мешков, пронумерованных числами от 1 до 2008, в каждом из которых сидит по 2008 лягушек. Два игрока играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом выбирает один из мешков и вынимает из него несколько лягушек. При этом, если в данном мешке осталось $x \geqslant 0$ лягушек, то из мешков с большими номерами, в которых сидело больше, чем x лягушек, несколько лягушек убегает так, что там остается ровно по x лягушек. Проигрывает игрок, взявший последнюю лягушку из мешка номер 1. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Четыре вершины правильного восьмиугольника покрашены красным цветом, а остальные четыре — синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой — с синими.

7. Дан квадрат 4×4, изначально все клетки покрашены в белый цвет. За один ход разрешается перекрасить всех соседей (по стороне) одной клетки (белый цвет в черный, а черный — в белый).
a) За какое наименьшее число ходов можно перекрасить все клетки в черный цвет?
b) Можно ли за нечетное число ходов перекрасить все клетки в черный цвет?